القسم : تحليل - رياضيات السنة : الرابعة ت+ج2 المادة : منطق رياضي. المحاضرة : عملي -1

- العلاقة الثنائية : هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي :

$$\rho \subseteq E\times E = \{(a,b) ; a,b\in E\}$$

$$A\times B = \{(a,b) ; a\in A , b\in B\}$$

- صفات العلاقة :

١- انعكاسية ٢- تخالفية (لا تناظرية)

٣- تناظرية (لا تخالفية) ٤- متعدية .

- المجموعة : هي تجمع يدل بذاته على ذاته .

تعريف مكافئ للمجموعة : جملة من العناصر تتصف بصفة واحدة على الأقل .

- تمرين ١ - لتكن لدينا المجموعة $S = \{1,2,3,5,7\}$ ولتكن العلاقة $R$ على $S$ معرفة بالشكل التالي :

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(1,3),(3,3),(1,5),(5,5),(5,7),(7,7),(1,7)\}$$

أوجد البيان الموجه ومخطط هاسي لهذه العلاقة بعد التأكد من كونها علاقة ترتيب .

الحل : من تعريف العلاقة نجد أنها انعكاسية وتخالفية ومتعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب جزئي على $S$ أي أن $(R,S)$ مجموعة مرتبة جزئياً .

البيان الموجه : مخطط هاسي :

أو يمكن رسم مخطط هاسي بالشكل :

تمرين 2 :

لتكن لدينا المجموعتان $D(12)$ و $D(16)$ برهن أن هاتين المجموعتين مع العلاقة \ (تقسيم) هما مجموعتان مرتبتان جزئياً ثم ارسم مخطط هاسي لكل منهما :

الحل :

$$D(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$D(16) = \{1,2,4,8,16\}$$

• ان العلاقة | انعكاسية وذلك لأن اي عنصر قاسم لنفسه $\forall a \in N ; a|a$

• ان العلاقة | تخالفية وذلك لأن :

$a|b \ \& \ b|a \Rightarrow a=b$

$\exists n,m \in N^* ; b=na \wedge a=mb \Rightarrow a=m(na)=(nm)a$

$\Rightarrow nm=1 \Rightarrow n=m=1 \Rightarrow b=1.a \wedge a=1.b \Rightarrow$

$a=b$

• ان العلاقة | متعدية وذلك لأنه إذا كان :

$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$\exists n,m \in N^* ; b=na \ \& \ c=mb \Rightarrow c=m(na)=(mn)a$

$\Rightarrow a|c$

وبتالي كل من (D(12),|) و (D(16),|) مجموعتان مرتبتان جزئياً.

مخطط هاس :

D(12)

أو

أو

D(16)

نلاحظ أن D(16) سلسلة لان كل عنصرين متقارنين ، ويعني (D(16),|) مجموعة مرتبة كلياً.

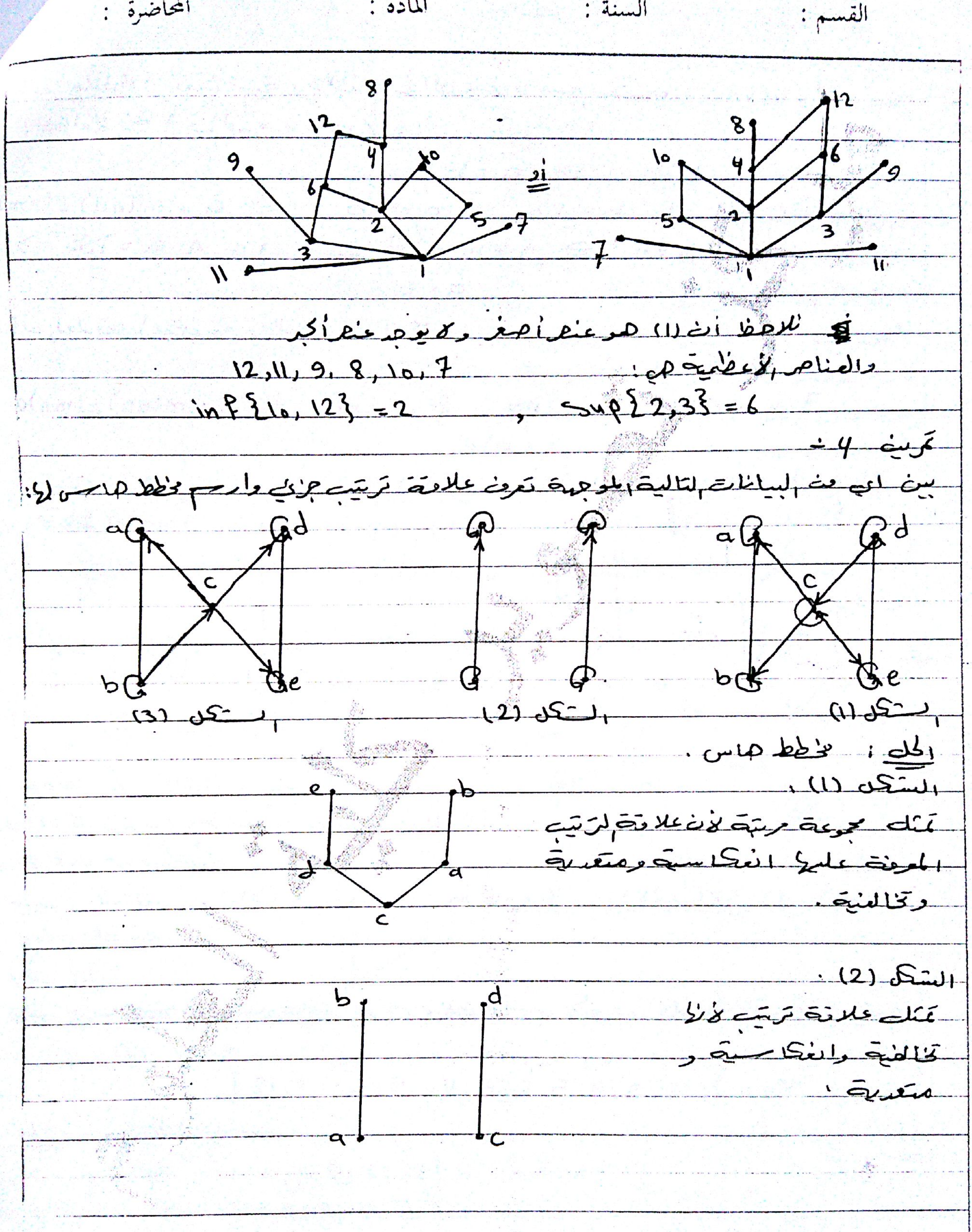
بينما نجد أن D(12) ليست سلسلة لأنه يوجد 3x2 = 2x3 اي انها ليست ترتيب كلي عليها .

تمرين [3] -

ارسم مخطط هاس لكل من علاقة الترتيب الجزئية يقسم على المجموعة

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

الحل : مخطط هاس :



نلاحظ أن (1) هو عنصر أصغر ولا يوجد عنصر أكبر

والعناصر الأعظمية هي: 12، 11، 9، 8، 10، 7

$\sup\{2,3\}=6$ , $\inf\{10,12\}=2$

تمرين 4 :

بين أي من البيانات التالية الموجهة تعرف علاقة ترتيب جزئي وارسم مخطط هاس لها:

الشكل (1)، الشكل (2)، الشكل (3)

الحل: مخطط هاس.

الشكل (1):

تمثل مجموعة مرتبة لأن علاقة الترتيب المعرفة عليها انعكاسية ومتعدية وتخالفية.

الشكل (2):

تمثل علاقة ترتيب لأنها تخالفية وانعكاسية و متعدية.

الشكل (3) : ليس له مخطط هاس
وذلك لأنها ليست متعدية لأن
$a \leq b$ & $b \leq c$
ولكن $a \nleq c$

b d a e c b a

تمرين 5-
ليكن لدينا مخطط هاس التالي :
١- اوجد
$\sup\{d,e,f\} = g$
$\inf\{a,c,f\} = d$

g d f e c a b

الحل :
$\inf\{a,b\} =$ غير موجود
$\sup\{a,b\} = c$
لا يوجد عنصر أصغر و g هو العنصر الأكبر
والعناصر الأصغرية a,b فقط .

تمرين 6-
اوجد مخطط هاس لمجموعة القوة للمجموعة $S = \{1,2,3\}$ مع علاقة الاحتواء

الحل :
$P(S) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, S\}$
نلاحظ أن $\phi$ هو العنصر الأصغر و S هو العنصر الأكبر .

S {2,3} {1,2} {1,3} {2} {3} {1} $\phi$

انتهت المحاضرة